

entonces, de acuerdo con la definición, la hipérbola conjugada de (1) tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (2)$$

Evidentemente, la ecuación (2) puede obtenerse de la ecuación (1) cambiando simplemente el signo de uno de los miembros de (1). Así, si la ecuación de una hipérbola es $2x^2 - 7y^2 = 18$, entonces la ecuación de su hipérbola conjugada es $7y^2 - 2x^2 = 18$.

El par de hipérbolas conjugadas (1) y (2), junto con sus asíntotas, se han trazado en la figura 99. Es un ejercicio sencillo demostrar que un par de hipérbolas conjugadas tienen un centro común, un par común de asíntotas, y todos sus focos equidistan del centro.

El estudiante debe observar el rectángulo dibujado en la figura 99. Un bosquejo aproximado de un par de hipérbolas conjugadas pueden obtenerse fácilmente construyendo primero este rectángulo, ya que sus diagonales son las asíntotas.

EJERCICIOS. Grupo 31

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha.

2. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda.

3. Demostrar que la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas $by - ax = 0$ y $by + ax = 0$.

4. Hallar y trazar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$4x^2 - 5y^2 = 7.$$

5. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje transversal está sobre el eje X , y una de sus asíntotas es la recta

$$2x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

7. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje transversal está sobre el eje Y , y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

8. Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a una cualquiera de sus dos asíntotas.

9. Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre sí, la hipérbola es equilátera.